宇宙の密度行列の発展

------部分系としてのmini-superspace------

阪大理　　　　森川　雅博

§1.Introduction

宇宙の起源を、量子力学的に探ろうとする試みが盛んに行われている。つまり、宇宙の波動関数Ψを導入して、宇宙を確率的に記述しようとするのである。古典軌道近似などを用いて、比較的具体的な結論が得られている。「1」 しかしながらこれらの、観測操作を考えにいれない宇宙全体の記述は通常の量子力学の枠に収まらず、波動関数Ψが与えられてもその解釈には根本的な変更が余儀なくされている。特に量子宇宙がどの様にして、現在の古典的宇宙に発展していくかが明らかでない。つまり、たいていの変数の分散は宇宙膨張と共に大きくなっていくのである。「2」 従って、早い時期に観測操作をほどこせば宇宙の発展の不確定性は比較的小さくてすむが、観測操作をほどこす時期が後になるほどその操作にともなう不確定性が増えるのである。現在我々の宇宙は十分古典的であると考えられているが、これが我々の限りなく小さな観測操作によって実現したとはとうてい考えにくい。全ての量子力学系がそうであるように、適当な正準変換によって分散の小さい変数を導入できるが、それが観測量に結び付く保証はない。「3」

本論では、よりスタンダードな形で量子力学を用いる。すなわち、宇宙は非常にたくさんの自由度を本来持っているが、そのうち観測可能な量はかなり限られていると考える。特に、宇宙のスケールファクターaをたとえ量子的に記述したとしても物質場との結合により粒子生成を起こしその量子的相関は生成した粒子の高次相関に散逸していくと考えられる。これにより、空間的に一様な記述、つまり局所的な観測者にとって可能な記述の範囲を越えて、空間的非一様性としてエネルギー、相関が散逸してしまうのである。以下では、初期に量子的に扱われなければならなかった宇宙がその膨張と共に、古典的な記述を許すようになっていく事を示す。言い替えれば観測の効果を、かなり理想化されたモデルではあるが、ダイナミックスの中に取り込んで議論していこうというのである。

宇宙の波動関数が次のように表されるとする:

$$\Psi(a,\phi,\phi_n)=\Psi_0(a,\phi)\prod_n\Psi_n(a,\phi,\phi_n). \qquad (1)$$

ここで、ψ_0（a、ϕ）は空間的に一様なモード（mini-superspace a、ϕ）に対する波動関数、ψ_n（a、ϕ, ϕ_n）は非一様なモード ϕ_n に対する波動関数である。もし、一様モードにのみ着目するなら、（１）をnについて和をとった密度行列がそれを記述する：

$$\rho(a_\pm,\phi_\pm)=\sum_n\Psi(a_+,\phi_+,\phi_n)\Psi^*(a_-,\phi_-,\phi_n).$$

そしてもしそれが次のようになって：（２）

$$\rho(a_\pm,\phi_\pm)\propto\exp\left[-f(a)(a_+-a_-)^2-g(a)(\phi_+-\phi_-)^2\right], \qquad (3)$$

f(a), g(a)がaの増加関数なら、宇宙膨張とともにa, ϕ の確定した（古典的な）宇宙になって行くと考えられる。「４」このf(a), g(a) を求めるのが以下で中心の目標である。

§２．モデル

以上のアイデアを実現するモデルとしては、重力と物質との結びつきができるだけ弱い方が都合がよい。従って、重力とほとんど共型結合するスカラー場を考える。共型不変性の破れは小さいとして摂動として扱う。メトリックは次のように与えられる：

$$ds^2=N^2a^2(\eta)(d\eta^2-d\vec{x}^2). \qquad (4)$$

ここでNはlapse関数である。それぞれの変数の作用は次のように与えられる：

$$S_g=\frac{V}{16\pi G}\int d\eta\, N a^4\left(\frac{6a''}{N^2a^3}-2\Lambda\right),$$

$$S_m=\frac{V}{2}\int d\eta N\eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\cdot\partial_\nu\phi,$$

$$S_{int} = -\frac{V}{2}\int d\eta\, N\left[m^2 a^2 + (6\xi - 1)\frac{a''}{aN^2}\right]\phi^2 \tag{5}$$

Vはある決まった座標空間体積で、ここでaは一様であるとする。プライムはηでの微分を表わす。 ϕ は元のスカラー場に a を掛けたものとして定義されている。次に、全体系の密度行列 ρ から非一様モードに対して径路積分を実行してミニスーパースペースの（変数a, ϕ の）密度行列 ρ を導く。この方法の詳細は「5」を参照して下さい。結局バックグランドaがあるためにスカラー場の粒子生成が起こりその反作用として $\rho(a_+, a_-)$ を対角化するような、つまり異なるスケールファクターaの間の量子的遷移を禁止する項が現われるのである。結果は次のようになる：

$$\rho(a_+, a_-) = \int Da_+ \int Da_-\, \exp\left[-i\frac{V}{16\pi G}\int d\eta\,(6a_+'^2 + 2\Lambda a_+^4 - 6a_-'^2 - 2\Lambda a_-^4) - \frac{Vm^4}{16\pi}\int d\eta\,(a_+^2 - a_-^2)^2\right]. \tag{6}$$

ここで、非局所項を落とし、簡単のために $\xi = \frac{1}{6}$ ととった。$\xi \neq \frac{1}{6}$ でも同様である。宇宙の波動関数の時と同様に、ρ がN（lapse）によらない条件を書き（拘束条件）、aと ϕ を対角化する表示を取れば、

$$\left[-\frac{2\pi G}{3V} a_+^{-p}\frac{\partial}{\partial a_+} a_+^{+p}\frac{\partial}{\partial a_+} - \frac{V\Lambda}{8\pi G} a_+^4 + \frac{2\pi G}{3V} a_-^{-p}\frac{\partial}{\partial a_-} a_-^{+p}\frac{\partial}{\partial a_-} + \frac{V\Lambda}{8\pi G} a_-^4 + \frac{iVm^4}{16\pi}(a_+^2 - a_-^2)^2\right]\rho(a_+, a_-) = 0 \tag{7}$$

となる。ここで、宇宙の波動関数の時と同様に、p はkinetic term の ϕ とその運動量との順序のとりかたの任意性を表わす。これが宇宙の密度行列に対するWheeler-DeWitt方程式である。変数が２倍になっていることのほかに２種の変数の混合する項が現われている。

§３. 準古典近似

得られた径路積分表示の密度行列を準古典近似を用いて見積ってみる。古典軌道は被積分関数の停留条件から決める。このとき＋と－の変数の混合項の効

果は更に高次の摂動とみなせるので考えない。境界条件としては、$\eta\to-\infty$に於て$a_{\pm}\to0$ととる。すると、この近似での密度行列は、

$$\rho(a_+,a_-)=\mathcal{N}\exp\Big[-i\frac{V}{4\pi G}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,(a_+^3-a_-^3)-\frac{Vm^4}{20\pi}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,a_c a_\Delta^2+O(a_\Delta^4)\Big] \qquad (8)$$

となる。ここで$a_\Delta=a_+-a_-$, $2a_c=a_++a_-$である。この式は、aについては、§1で期待した通りの形をしている。つまり、aの分散はaが大きくなるとともに減少する。これは、宇宙膨張とともに宇宙が徐々に古典的に振舞う（つまり、どの時点でどの様に観測してもほぼ同一の結果が得られる）ようになっていく事を示す。この結果は古典軌道の境界条件として、$\eta\to+\infty$に於て$a_{\pm}\to0$ととっても全く同じである。つまり、宇宙が大きいほどその宇宙はより古典的に振舞うのであるが、これは、宇宙がその膨張から収縮に転ずるところで分散の振舞いから決まる熱力学的な時間が逆転することを意味しない。それを議論するためには閉じた古典軌道を用いての議論が必要である。

また、古典的な時計の役割をする変数ψを導入してこれとρとの相関から”時間発展”の方程式を得ることが出来る。新しく導入した変数$\psi_{\pm}$も含めて、密度行列に対してWheeler-DeWitt方程式をたてて

$$\rho(a_\pm,\psi_\pm)=A(a_\pm,\psi_\pm)\exp iB(\psi_\pm) \qquad (9)$$

の形を仮定する。これにＷＫＢ近似をしてある一つの古典解から時間τを導入すると、次のようになる：

$$i\frac{\partial A}{\partial\tau}=\big[\tilde{\mathcal{H}}-(A,\tilde{\mathcal{H}}A)\big]A. \qquad (10)$$

ここで$\tilde{\mathcal{H}}$は（７）のρに対する作用素として定義される。また、$(\ ,\ )$はA_a, A_bに対して

$$(A_a,A_b)=\int Da_+\int Da_-\,A_a(a_\pm,\psi_\pm)A_b(a_\pm,\psi_\pm) \qquad (11)$$

で与えられる。この式を出発点にして密度行列Aについて、時間τを用いたときの非可逆な発展を記述していく事が出来る。

§4．結論

観測可能性を全く無視して宇宙全体に対して量子力学を適用すれば、我々の宇宙はマクロな宇宙の状態の重ね合わせとして記述されることになる。しかし局所的な観測可能性を仮定すれば観測量の密度行列は宇宙膨張とともに対角化してゆき、異なるマクロな状態の間の干渉効果が無くなっていく事がわかる。すると、ρは宇宙の古典的なアンサンブルを表わすようになる。ただし、このアンサンブルでの平均量のみが観測量に対応するのではない。観測は局所的なものであるから、それに対応するスケールより大きな波長の揺らぎは平均されずに生のものが観測されると考えられる。観測の時間、空間スケールより揺らぎの振動数の逆数、波長が大きければ、揺らぎは固定してしまって基本定数として現われるだろう。観測の時間スケールだけより大きければ、宇宙の空間パターンとして現われるだろう。一方、空間スケールだけより大きければ、mini-superspaceとなる。両方より小さければ、平均量が問題になってくる。これらのスケールによって異なるダイナミックスを定量的に求めるのが今後の一つの課題である。

References

[1] J. Hartle and Hawking, Phys. Rev. D28, 2960 (1983)など。
[2] A. Hosoya, "Particle ane Nuclei", Terazawa ed., World Scientific (1985), Singaporeなど。
[3] J. Halliwell, "Correlation in the Wave Function of the Universe." DAMTP preprint (1987).
[4] H. Zeh, Phys. Lett. A116, 9, (1986).
[5] M. Morikawa, Phys. Rev. D33, 3607, (1986).